LE FUNZIONI CONTINUE: RICHIAMI ED APPROFONDIMENTI

Appunti presi dalle lezioni del prof. Nedo Checcaglini
Liceo Scientifico di Castiglion Fiorentino (Classe 5B)

5 febbraio 2004

0.1 FUNZIONI CONTINUE

Accanto alla nozione di "*limite per le funzioni*", introduciamo il concetto di "*continuità delle funzioni*", che può interpretarsi come completamento di quella.

Sappiamo che la nozione di limite per $x \to c$ riguarda il comportamento della funzione $f(x)$ negli *intorni* H di c, privati del punto c stesso, e pertanto non dipende dal valore $f(c)$ assunto dalla $f(x)$ in c, anzi $f(x)$ può anche non essere definita in c. Il caso più frequente sarà quando il limite della $f(x)$ per $x \to c$ sarà uguale ad $f(c)$; in tal caso diremo che la $f(x)$ è *continua* in $x = c$.

Da un punto di vista intuitivo possiamo dire che una funzione è *continua* quando è possibile tracciarne il grafico "*senza staccare la penna dal foglio*", ma ovviamente in matematica dobbiamo dare una definizione rigorosa, cui successivamente far seguire gli esempi. Si ha allora la seguente:

Definition 1 *Si dice che la funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I=]a,b[, è continua nel punto $c \in I$, se risulta*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Quindi, ricordando anche la definizione di limite, possiamo affermare che una funzione $y = f(x)$ è continua in $x = c$ se si verificano queste tre condizioni:

1. la funzione è definita in $x = c$;
2. esiste (finito) il limite l della funzione per $x \to c$ (cioè $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$);
3. il limite l coincide con il valore assunto dalla funzione in $x = c$ (cioè $f(c) = l$).

Definition 2 *Si dice che la funzione $y = f(x)$ è continua a destra [oppure a sinistra] nel punto c se vale solamente la relazione $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ [oppure $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$].*

In definitiva quindi una funzione $f(x)$ è continua in $x = c$ se lo è tanto a destra quanto a sinistra.

Definition 3 *Si dice che la funzione $y = f(x)$ è continua nell' intervallo [a,b] se è continua in tutti i punti di tale intervallo.*

Le principali funzioni continue sono:

1. la funzione costante ($\forall x \in \mathbf{R}$)
2. la variabile indipendente ($\forall x \in \mathbf{R}$);
3. le funzioni razionali intere ($\forall x \in \mathbf{R}$);
4. le funzioni razionali fratte ($\forall x \in \mathbf{R}$, eccetto i valori che annullano il denominatore);
5. le funzioni goniometriche $\sin x$ e $\cos x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$);
6. la funzioni goniometrica $\tan x$ ($\forall x \neq \pi/2 + k\pi$);
7. la funzioni goniometrica $\cot x$ ($\forall x \neq k\pi$);
8. la funzione esponenziale $y = a^x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$);
9. la funzione logaritmica $y = \log x$ ($\forall x > 0$);
10. la funzione irrazionale $y = \sqrt[n]{x}$ ($\forall x \in \mathbf{R}$ se n è dispari**,** $\forall x \geq 0$ se n è pari)

Rimandando ad un qualunque testo di analisi i teoremi sulle funzioni continue, andiamo a prendere in considerazione i **punti di discontinuità.**

0.2 PUNTI DI DISCONTINUITA'

Sia $f(x)$ una funzione continua in tutti i punti di un intervallo I, privato al più del punto c.

Se la funzione $f(x)$ non è definita in c o, essendovi definita, non è tuttavia in tale punto continua, si dice che c è un **punto singolare (o di discontinuità)** della funzione e questa si dice **discontinua** in c.

Si usa, riguardo ai punti singolari, distinguere i tre casi seguenti:

- **Punto di discontinuità di prima specie;**
- **Punto di discontinuità di seconda specie (o punto di infinito);**
- **Punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile).**

Definition 4 *Si dice che una funzione $f(x)$ presenta nel punto c una **discontinuità di prima specie,** se in tale punto **esistono finiti i limiti destro e sinistro,** ma sono **diversi** tra loro, cioè $\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$ con $l_2 \neq l_1$ (La differenza $l_2 - l_1$ si dice **salto** della funzione).*

Example

La funzione $y = 2 + \frac{|x|}{x} = \left\{ \begin{array}{l} 2+1=3 \text{ per } x>0 \\ 2-1=1 \text{ per } x<0 \end{array} \right.$ presenta in $x = 0$ una discontinuità di prima specie con salto uguale a 2.

Definition 5 *Si dice che una funzione $f(x)$ presenta nel punto c una **discontinuità di seconda specie** (o **punto di infinito**) se in tale punto almeno uno dei due limiti $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ non esiste o è infinito.*

Example

La funzione $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ presenta in $x = 1$ una discontinuità di seconda specie in quanto si ha:
$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Definition 6 *Si dice che una funzione $f(x)$ presenta nel punto c una **discontinuità di terza specie (o eliminabile)** se in tale punto **esiste finito** il $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, ma $f(c)$ **non esiste,** oppure $f(c)$ **esiste** ma risulta $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$.*

Example

La funzione $y = \frac{2x^2-8}{x-2}$, definita e continua $\forall x \neq 2$, presenta in $x = 2$ una discontinuità di terza specie.

Si ha infatti: $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \frac{2x^2-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 2(x+2) = 8^\pm$.

Tale funzione può allora essere resa continua in tale punto, in questo caso su tutto l'asse reale, definendola ("completandola") nel modo che segue:

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{per } x \neq 2 \\ 8 & \text{per } x = 2 \end{array} \right. .$$

Example

La funzione

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{per } x \neq 1 \\ 3 & \text{per } x = 1 \end{array} \right. .$$

è definita su tutto l'asse reale, è continua $\forall x \neq 1$ e presenta in $x = 1$ una discontinuità di terza specie.

Si ha infatti: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. Tale funzione può allora essere resa continua in tale punto, definendola ("modificandola") nel modo che segue:

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{per } x \neq 1 \\ 1 & \text{per } x = 1 \end{array} \right. .$$

Remark 7 *Alcuni autori distinguono tra non continuità e discontinuità, riservando quest'ultimo termine (discontinuità) ai soli casi, fra quelli sopra elencati, in cui la funzione sia definita in* x_0 *e chiamando singolari i punti in cui la funzione o non è definita, o è discontinua. Noi identificheremo, come molti autori, la non continuità con la discontinuità per cui parleremo indifferentemente di punti singolari o punti di discontinuità.*